99 MATH. II - PSI

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1999

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE
FILIÈRE PSI
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'emploi de la calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition du concours E. N. T. P. E..
Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES II- PSI.
L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI, comporte 4 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions complexes définies sur la droite réelle $\mathbb{R}$, indéfiniment dérivables et à décroissance rapide à l'infini. C'est-à-dire : toute fonction f de l'espace $\mathcal{S}$ est de classe C^∞ et, pour tout couple d'entiers naturels p et q et toute fonction f de l'espace $\mathcal{S}$, le produit de la fonction puissance $x \mapsto x^p$ et de la dérivée $f^{(q)}$ d'ordre q de f tend vers 0 à l'infini :

$$\lim_{x\to\infty} x^p.f^{(q)}(x) = 0 \ ; \ \lim_{x\to-\infty} x^p.f^{(q)}(x) = 0 \ .$$

Les conventions $f^{(0)} = f$, $f' = f^{(1)}$ sont utilisées. Il est admis que l'ensemble $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel complexe.

Première partie

I-1°) Fonction ω :

Soit ω la fonction définie par la relation : $\omega(x) = e^{-x^2} = \exp(-x^2)$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, la dérivée d'ordre n de la fonction ω, $\omega^{(n)}$, est le produit de la fonction ω et d'une fonction polynôme P_n de degré n :

pour tout réel x, $\omega^{(n)}(x) = P_n(x).\omega(x)$.

En déduire que la fonction ω appartient à l'espace vectoriel $\mathcal{S}$.

I-2°) Propriétés de l'espace vectoriel $\mathcal{S}$:

Démontrer les propriétés suivantes :

a. Si la fonction f appartient à $\mathcal{S}$, la fonction dérivée f' appartient aussi à $\mathcal{S}$.

b. Soient f une fonction de l'espace $\mathcal{F}$ et P une fonction polynôme complexe ; la fonction P.f : $x \mapsto P(x).f(x)$ appartient à l'espace $\mathcal{F}$.

c. Si f et g sont deux fonctions de l'espace $\mathcal{F}$, la fonction f.g : $x \mapsto f(x).g(x)$ appartient à l'espace $\mathcal{F}$.

d. Toute fonction f de l'espace $\mathcal{F}$ est intégrable sur la droite réelle $\mathbb{R}$.

e. A tout couple de fonctions f et g appartenant à l'espace $\mathcal{F}$, peut être associé le nombre complexe : $(f \mid g) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}.g(x)\,dx$.

Il est admis que l'espace $(\mathcal{F}, (\mid))$ est un espace préhilbertien complexe.

I-3°) Dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{F}$:

Étant donné un entier naturel k quelconque, soit ω_k la fonction translatée de la fonction ω de la quantité k : pour tout réel x, $\omega_k(x) = \omega(x - k)$.

a. Démontrer que les fonctions ω_k, $k \in \mathbb{N}$, appartiennent à l'espace $\mathcal{F}$.

b. Est-ce que la famille $(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$, est libre ? Quelle conclusion en tirer sur la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{F}$?

I-4°) Polynômes H_n :

Puisqu'à la question I-1°, il a été démontré que la dérivée d'ordre n de la fonction ω est égale au produit d'une fonction polynôme, de degré n, et de la fonction ω, soit H_n le polynôme défini par la relation :

(I) pour tout réel x, $\omega^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x).\omega(x)$.

a. Calculer les polynômes : H_0, H_1, H_2 et H_3.

b. Déterminer l'équation différentielle (Ω) linéaire et homogène du premier ordre vérifiée par la fonction ω dont le coefficient de la dérivée est égal à 1. En dérivant n-fois cette équation ($n \geqslant 1$), établir, pour tout entier n strictement positif, une relation de récurrence linéaire **(R)** entre les polynômes H_{n+1}, H_n et H_{n-1}.

c. Quel est le degré du polynôme H_n ? Déterminer, pour tout entier naturel n, le coefficient a_n du terme de plus haut degré du polynôme H_n.

d. Établir, par dérivation de la relation **(I)** définissant les polynômes H_n, une relation **(S)** entre les polynômes H_{n+1}, H_n et H'_n ; H'_n est le polynôme dérivée de H_n.
Déduire des relations **(R)** et **(S)** une relation entre les polynômes H'_n et H_{n-1}.

I-5°) Racines du polynôme H_n lorsque l'entier n est strictement positif :

a. Il est supposé, dans cet alinéa, qu'il existe un entier n, supérieur ou égal à 2 ($n \geqslant 2$), tel que le polynôme H_n admette n racines réelles distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ rangées dans l'ordre croissant.

Quelle est la factorisation du polynôme H_n sur $\mathbb{R}$?

Démontrer que le polynôme H'_n admet n–1 racines β_k, k= 1, 2, ..., n–1 qui vérifient les inégalités $\alpha_k < \beta_k < \alpha_{k+1}$, k= 1, 2, ..., n–1. Quelle est la factorisation du polynôme H'_n sur $\mathbb{R}$?

Calculer à l'aide des α_k et des β_k la valeur prise par le polynôme H_{n+1} au point α_k, k=1, 2, ..., n.

Quel est le signe de $H_{n+1}(\alpha_1)$? Quel est plus généralement celui de $H_{n+1}(\alpha_k)$ ($2 \leqslant k \leqslant n$) ?

En déduire que le polynôme H_{n+1} admet n–1 racines γ_k, k= 1, 2, ..., n–1 qui vérifient les inégalités $\alpha_k < \gamma_k < \alpha_{k+1}$, k= 1, 2, ..., n–1.

Montrer l'existence de deux autres racines γ_0 et γ_n ; les placer. Conclure.

b. Démontrer que, pour tout entier n strictement positif, le polynôme H_n admet n racines réelles distinctes.

Seconde partie

Le but de cette partie est de définir dans cet espace $\mathcal{S}$ la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ et de mettre en évidence des valeurs propres et vecteur propres de cette transformation.

II-1°) Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$:

Soit f une fonction de l'espace $\mathcal{S}$; soit $\mathcal{F}(f)$ la fonction définie par la relation :

$$\text{pour tout réel } \lambda, \quad \mathcal{F}(f)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\lambda x}\, dx \ .$$

a. Démontrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est définie, continue et bornée sur toute la droite réelle. La fonction $\mathcal{F}(f)$ est dite transformée de Fourier de f.

b. Démontrer que la fonction $\mathcal{F}(f) : \lambda \mapsto \mathcal{F}(f)(\lambda)$ est dérivable. Exprimer sa dérivée $\mathcal{F}(f)'$ à l'aide de la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{S}$. En déduire que, pour toute fonction f de $\mathcal{S}$, la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ de f est indéfiniment dérivable. Exprimer la dérivée d'ordre n comme transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{S}$.

Une convention d'écriture : écrire $\mathcal{F}[x^p.f(x)]$ pour la transformée de Fourier de la fonction $g : x \mapsto x^p.f(x)$. C'est-à-dire : $\mathcal{F}[x^p.f(x)] = \mathcal{F}(g)(\lambda)$.

c. Démontrer que la transformée de Fourier de la fonction dérivée f' s'exprime de manière simple au moyen de la transformée de Fourier de la fonction f. Généraliser le résultat à la transformée de Fourier de la dérivée d'ordre q : $f^{(q)}$.

d. Étant donnés deux entiers naturels p et q, soit g la fonction : $\lambda \mapsto \lambda^p . \frac{d^q}{d\lambda^q} \mathcal{F}(f)(\lambda)$.

Déterminer une fonction h dont la fonction g est la transformée de Fourier ; $g = \mathcal{F}(h)$.
En déduire : la fonction $\mathcal{F}(f)$ appartient à l'espace $\mathcal{S}$, l'application $\mathcal{F}$: $f \mapsto \mathcal{F}(f)$, est un endomorphisme de $\mathcal{S}$.

Étant donné un entier naturel n quelconque, soit φ_n la fonction définie sur toute la droite réelle par la relation : $\varphi_n(x) = H_n(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}} = H_n(x) \exp(-\frac{x^2}{2})$.

Les fonctions H_n sont les fonctions polynômes définies à la question I-4. Pour mener à leur terme les calculs des questions II-2 et II-3, le résultat $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ est admis.

II-2°) Orthogonalité des fonctions φ_n :

Soient p et q deux entiers naturels tels que p soit inférieur ou égal à q ($p \leqslant q$). Calculer le produit scalaire $(\varphi_p \mid \varphi_q)$ défini à la question I-2.e.

II-3°) Transformée de Fourier de la fonction φ_n :

a. Démontrer que la fonction φ_0 vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre (Φ). Démontrer que la transformée de Fourier $\hat{\varphi}_0$ de la fonction φ_0 existe, appartient à l'espace $\mathcal{S}$ et vérifie une équation différentielle simple. En déduire la fonction $\hat{\varphi}_0$.

b. Démontrer que la transformée de Fourier $\hat{\varphi}_n$ de la fonction φ_n est le produit de la fonction φ_0 et d'un polynôme Q_n :

$$\hat{\varphi}_n(x) = \varphi_0(x)\, Q_n(x).$$

c. Démontrer que les fonctions φ_n, $n \in \mathbb{N}$, vérifient, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la relation :

$$\varphi_{n+1}(x) = -2\, \varphi_n'(x) + 2n\, \varphi_{n-1}(x) .$$

d. Quelles sont les transformées de Fourier $\hat{\varphi}_0$, $\hat{\varphi}_1$ et $\hat{\varphi}_2$ des fonctions φ_0, φ_1 et φ_2 ? Les exprimer à l'aide des polynômes H_0, H_1 et H_2 et de la fonction φ_0.

Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 ($n \geq 1$), une relation de récurrence entre les polynômes Q_{n+1}, Q_n et Q_{n-1}. En déduire la transformée de Fourier $\hat{\varphi}_n$ de la fonction φ_n.

Que dire des valeurs propres de l'endomorphisme $\mathcal{F}$?

FIN DU PROBLÈME

FIN DE L'ÉPREUVE